

### Función signo

Sea la función  $sign: \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$  definida así:

$$sign(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Para una aproximación mediante una función continuamente diferenciable se define como límite de otras funciones. Por ejemplo:

$$sign(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tanh(nx)$$

Observación: La convergencia en este caso no es uniforme sólo puntual.

**Ejemplo.** Sea la función  $\delta: \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$  definida así:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$$\delta(x) = 1 - sign^2(x)$$

Se obtiene la siguiente desigualdad:

$$\delta\left(\prod_k x_k\right) \leq \sum_k \delta(x_k)$$

La igualdad sólo es válida si existe un único término de la sucesión  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  igual a cero.

### Función signo infinito

Sea la función  $sign_\infty: \mathbb{R} \rightarrow \{-\infty, 0, +\infty\}$  definida así:

$$sign_\infty(x) = \begin{cases} -\infty, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ +\infty, & x > 0 \end{cases}$$

$$sign_\infty(x) = \frac{sign(x)}{\delta(x)}$$

**Ejemplo.** Sean  $a \in \mathbb{R}$  y la función  $\varphi_a: \mathbb{R} \rightarrow \{-\infty, 0, +\infty\}$  definida así:

$$\varphi_a(x) = \begin{cases} -\infty, & a < 0 \wedge x = a \\ 0, & a = 0 \vee x \neq a \\ +\infty, & a > 0 \wedge x = a \end{cases}$$

$$\varphi_a(x) = sign_\infty(a\delta(x - a))$$

### Función escalón de Heaviside

Sea la función  $H: \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1/2, 1\}$  definida así:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/2, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

$$H(x) = \frac{1}{2}(1 + \text{sign}(x))$$

Luego,

$$\delta(x) = 4H(x)(1 - H(x))$$

### Función valor absoluto

Sea la función  $| \cdot |: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  definida así:

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$|x| = x \text{sign}(x)$$

### Funciones mínimo y máximo

Sea la función  $\min: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida así:

$$\min(x, y) = \begin{cases} x, & x < y \\ y, & x \geq y \end{cases}$$

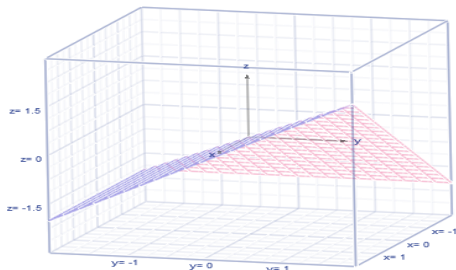
En la expresión  $(1 - H(x - y))x + H(x - y)y$ , la discontinuidad en  $x = y$  es removible. Así se obtiene:

$$\min(x, y) = \frac{1}{2}((x + y) - |x - y|)$$

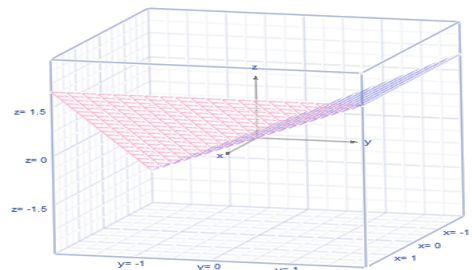
Luego, la función  $\max: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  se define así:

$$\max(x, y) = \begin{cases} x, & x \geq y \\ y, & x < y \end{cases}$$

$$\max(x, y) = (x + y) - \min(x, y) = \frac{1}{2}((x + y) + |x - y|)$$



$$z = \min(x, y)$$



$$z = \max(x, y)$$

### Función indicatriz de un intervalo cerrado

Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$ . Se define la función  $I_{[a,b]}: \mathbb{R} \rightarrow \{0,1\}$ , así:

$$I_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a, b] \\ 1, & x \in [a, b] \end{cases}$$

$$I_{[a,b]}(x) = \text{sign}(\text{sign}(x - a) - \text{sign}(x - b))$$

## Función indicatriz de intervalos abiertos y semiabiertos

$$I_{]-\infty, b]}(x) = \lim_{a \rightarrow -\infty} I_{[a, b]}(x) = \text{sign}(1 - \text{sign}(x - b))$$

$$I_{]a, +\infty[}(x) = 1 - I_{]-\infty, a]}(x) = 1 - \text{sign}(1 - \text{sign}(x - a))$$

$$I_{]a, b]}(x) = I_{]a, +\infty[} I_{]-\infty, b]}(x) = (1 - \text{sign}(1 - \text{sign}(x - a))) \text{sign}(1 - \text{sign}(x - b))$$

$$I_{[a, +\infty[}(x) = \lim_{b \rightarrow +\infty} I_{[a, b]}(x) = \text{sign}(1 + \text{sign}(x - a))$$

$$I_{]-\infty, b[}(x) = 1 - I_{[b, +\infty[}(x) = 1 - \text{sign}(1 + \text{sign}(x - b))$$

$$I_{[a, b[}(x) = I_{[a, +\infty[} I_{]-\infty, b[}(x) = \text{sign}(1 + \text{sign}(x - a)) (1 - \text{sign}(1 + \text{sign}(x - b)))$$

$$I_{]a, b[}(x) = I_{]a, +\infty[} I_{]-\infty, b[}(x) = (1 - \text{sign}(1 - \text{sign}(x - a))) (1 - \text{sign}(1 + \text{sign}(x - b)))$$

**Ejemplo.** Sea  $a \in \mathbb{R}^+$ :

$$I_{]-a, a[}(x) = 1 - \text{sign}(1 - \text{sign}(a - |x|))$$

$$I_{]-a, a[^2}(x, y) = 1 - \text{sign}(2 - (\text{sign}(a - |x|) + \text{sign}(a - |y|)))$$

**Ejemplo**

$$2I_{[0, +\infty[}(x) - 1 = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

**Ejemplo**

$$\delta(x) = I_{]-\infty, 0]}(x) I_{[0, +\infty[}(x)$$

## Propiedades

Sea  $\mathcal{F}$  la familia de intervalos (cerrados, abiertos y semiabiertos) de  $\mathbb{R}$  a la que pertenecen el conjunto vacío (igualdad de extremos) y  $]-\infty, +\infty[$ . Si  $A, B \in \mathcal{F}$ , entonces:

$$I_{\emptyset} = 0$$

$$I_{\mathbb{R}} = 1$$

$$I_{A \cap B} = I_A I_B, \text{ (intersección de intervalos)}$$

$$I_{A \setminus B} = I_A (1 - I_B), \text{ (diferencia de intervalos)}$$

$$I_{A \cup B} = I_A + I_B - I_A I_B, \text{ (unión de intervalo)}$$

$$I_{A \Delta B} = I_A + I_B - 2I_A I_B, \text{ (diferencia simétrica de intervalos)}$$

$$I_{A \times B}(x, y) = I_A(x) I_B(y), \text{ (producto cartesiano de intervalos)}$$

También,

$$I_{A \Delta B} = |I_A - I_B|$$

## Identidades de De Morgan

$$1 - I_{A \cap B} = 1 - I_A I_B$$

$$1 - I_{A \cup B} = (1 - I_A)(1 - I_B)$$

## Relaciones entre intervalos

### Inclusión

$$\underbrace{\delta(\inf(A) - \inf(B)) \left( I_B(\inf(B)) + (1 - I_B(\inf(B))) (1 - I_A(\inf(A))) \right) + (1 - \delta(\inf(A) - \inf(B))) I_B(\inf(A))}_{h} = 1$$

(Si el ínfimo de los intervalos coincide, entonces, si  $B$  es abierto por la izquierda  $A$  también, pero si el ínfimo no coincide, entonces, el ínfimo de  $A$  está en  $B$ )

$$\underbrace{\delta(\sup(A) - \sup(B)) \left( I_B(\sup(B)) + (1 - I_B(\sup(B))) (1 - I_A(\sup(A))) \right) + (1 - \delta(\sup(A) - \sup(B))) I_B(\sup(A))}_{k} = 1$$

(Si el supremo de los intervalos coincide, entonces, si  $B$  es abierto por la derecha  $A$  también, pero si el supremo no coincide, entonces, el supremo de  $A$  está en  $B$ ). Por tanto,

$$hk = \begin{cases} 0, & A \not\subseteq B \\ 1, & A \subseteq B \end{cases}$$

Luego,

$$\underbrace{\delta(\inf(A) - \inf(B)) \left( I_A(\inf(A)) + (1 - I_A(\inf(A))) (1 - I_B(\inf(B))) \right) + (1 - \delta(\inf(A) - \inf(B))) I_A(\inf(B))}_{h'} = 1$$

(Si el ínfimo de los intervalos coincide, entonces, si  $A$  es abierto por la izquierda  $B$  también, pero si el ínfimo no coincide, entonces, el ínfimo de  $B$  está en  $A$ )

$$\underbrace{\delta(\sup(A) - \sup(B)) \left( I_A(\sup(A)) + (1 - I_A(\sup(A))) (1 - I_B(\sup(B))) \right) + (1 - \delta(\sup(A) - \sup(B))) I_A(\sup(B))}_{k'} = 1$$

(Si el supremo de los intervalos coincide, entonces, si  $A$  es abierto por la derecha  $B$  también, pero si el supremo no coincide, entonces, el supremo de  $B$  está en  $A$ ). Por tanto,

$$h'k' = \begin{cases} 0, & B \not\subseteq A \\ 1, & B \subseteq A \end{cases}$$

### Igualdad

$A = B$  si y sólo si  $A \subseteq B$  y  $B \subseteq A$ . Sobre intervalos también se puede plantear de la siguiente manera:

Si  $\underbrace{\left| 1 - (I_A(\inf(B)) + I_B(\inf(A))) \right|}_p = 1$ , entonces los intervalos tienen el mismo extremo inferior.

Si  $\underbrace{\left| 1 - (I_A(\sup(B)) + I_B(\sup(A))) \right|}_q = 1$ , entonces los intervalos tienen el mismo extremo superior.

Por tanto,

$$pq = \begin{cases} 0, & A \neq B \\ 1, & A = B \end{cases}$$

### Inclusión propia

$$\underbrace{I_B(\inf(A)) + (1 - I_B(\inf(A)))\delta(\inf(A) - \inf(B))(1 - I_B(\inf(B)))}_u = 1 \text{ (El ínfimo de } A \text{ está en } B \text{ pero si no es así, si el}$$

ínfimos de los intervalos coincide, entonces, el ínfimo de  $B$  no está en  $B$ )

$$\underbrace{I_B(\sup(A)) + (1 - I_B(\sup(A)))\delta(\sup(A) - \sup(B))(1 - I_B(\sup(B)))}_v = 1 \text{ (El supremo de } A \text{ está en } B \text{ pero si no es así,}$$

si el supremo de los intervalos coincide, entonces, el supremo de  $B$  no está en  $B$ )

Por tanto,

$$(1 - pq)uv = \begin{cases} 0, & A \not\subset B \\ 1, & A \subset B \end{cases}$$

### Disyunción

$$\underbrace{I_A(\inf(B))I_B(\sup(A)) + I_A(\sup(B))I_B(\inf(A))}_r = 1, \text{ entonces un intervalo comparte su supremo mientras que el otro}$$

comparte su ínfimo sin llegar a estar incluido uno en el otro. Por tanto,

$$r + hk + h'k' - hkh'k' = \begin{cases} 0, & A \cap B = \emptyset \\ 1, & A \cap B \neq \emptyset \end{cases}$$

**Ejemplo.** Si  $A \cap B \neq \emptyset$  y es un conjunto infinito se obtiene lo siguiente:

$$\text{Si } \sup(A) > \inf(B), \text{ entonces, } \frac{1}{\sup(A) - \inf(B)} I_{A \cap B}(x) \geq \frac{1}{\sup(A) - \inf(A)} I_A(x) \frac{1}{\sup(B) - \inf(B)} I_B(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Si } \sup(B) > \inf(A), \text{ entonces, } \frac{1}{\sup(B) - \inf(A)} I_{A \cap B}(x) \geq \frac{1}{\sup(A) - \inf(A)} I_A(x) \frac{1}{\sup(B) - \inf(B)} I_B(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Observación. Las expresiones } \underbrace{\delta(\sup(A) - \inf(B))I_A(\sup(A))I_B(\inf(B))}_s \text{ y } \underbrace{\delta(\sup(B) - \inf(A))I_A(\inf(A))I_B(\sup(B))}_t \text{ son}$$

excluyentes. Por tanto, si  $s + t = 1$ , entonces un intervalo comparte únicamente su supremo mientras que el otro comparte únicamente su ínfimo. En este caso, la intersección de los intervalos es finita.

### Función piso

Se define la función  $\lfloor \cdot \rfloor: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ , así:

$$\lfloor x \rfloor = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n I_{[n, n+1[}(x)$$

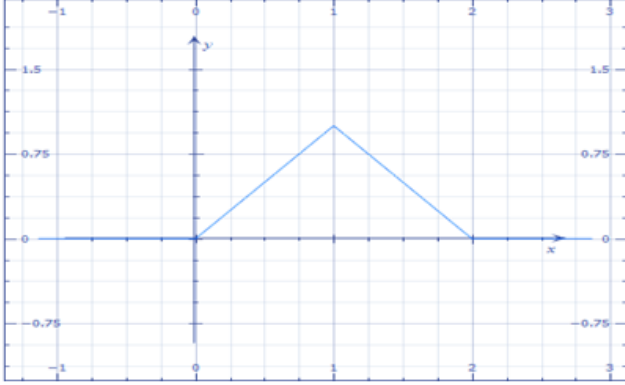
**Ejemplo.** Se define la función  $I_{\mathbb{Z}}: \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ , así:

$$I_{\mathbb{Z}}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Z} \\ 1, & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

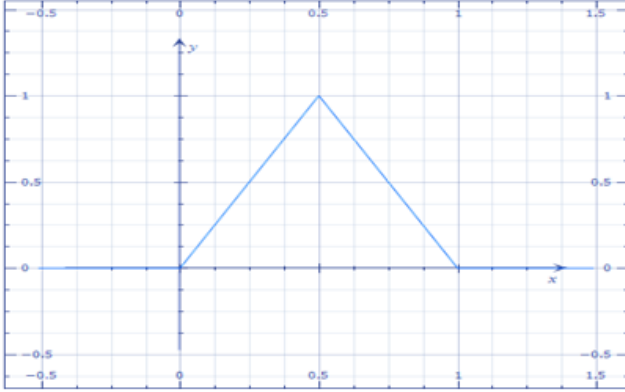
$$I_{\mathbb{Z}}(x) = 1 - \text{sign}(x - \lfloor x \rfloor)$$

**Ejemplo.** Método para construir una función continua y periódica.

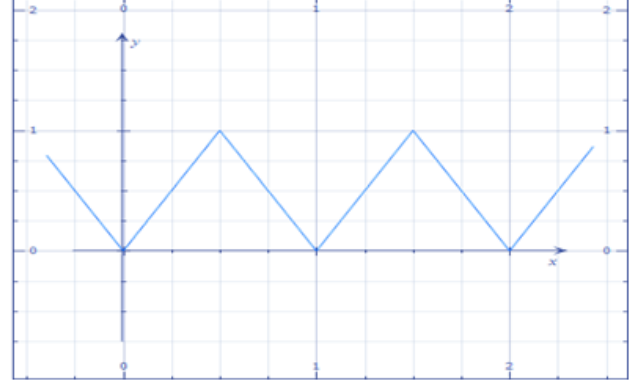
1.  $f_1(x) = xI_{[0,1]}(x) - (x-2)I_{[1,2]}(x)$



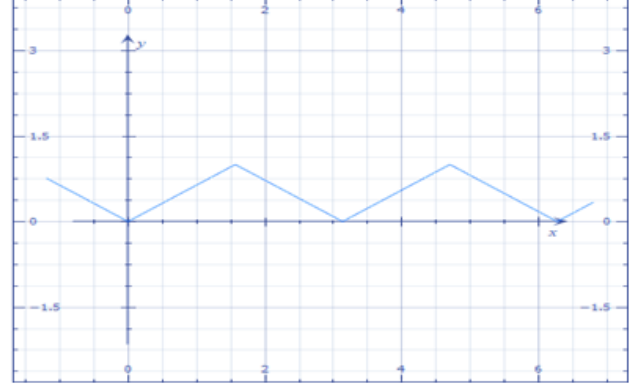
2.  $f_2(x) = f_1(2x)$



3.  $f_3(x) = f_2(x - [x])$



4.  $f_4(x) = f_3(x/\pi) \leq |\sin x|$



Observación:  $I_{[0,1]}(x - [x]) = 1$

**Ejemplo.** Sea  $m \in \mathbb{Z}^+$ . La ecuación  $x(x - [x]) = m$  no tiene solución para valores enteros o negativos de  $x$ . Equivale a resolver la ecuación  $x^2 - nx - m = 0$  para cualquier entero  $n \geq m$ , donde  $x = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4m}}{2}$ . Además, la llamada *función de parte decimal*  $x - [x]$  es periódica y por lo tanto tiene una expansión en serie de Fourier, para valores no enteros de  $x$ , la cual es:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi kx)}{k}$$

En consecuencia,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi k(n + \sqrt{n^2 + 4m}))}{k} = \frac{\pi}{2} (n + 1 - \sqrt{n^2 + 4m})$$

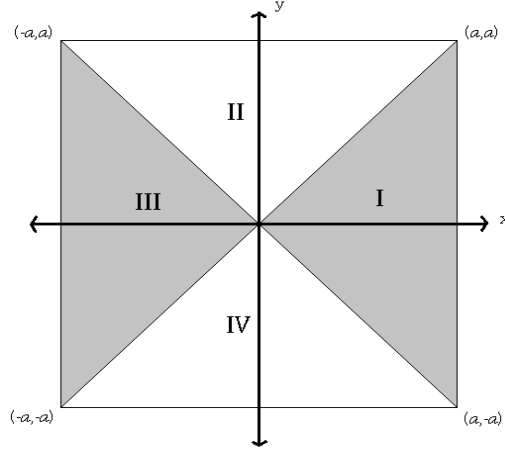
**Ejemplo.** Sean  $a, b \in \mathbb{R}^+$  y los vértices de la pirámide recta de base cuadrada (de intersección con el eje  $z$ :  $(0,0,b)$  y de intersecciones con el plano  $xy$ :  $(a,a)$ ,  $(-a,a)$ ,  $(-a,-a)$  y  $(a,-a)$ ).

Es decir, los vértices de cada cara triangular están dados por:

$$\mathbf{A} = (0,0,b), \mathbf{B} = (\text{sign}(x)a, \text{sign}(y)a, 0), \mathbf{C} = (-\text{sign}(x)\text{sign}(|y| - |x|)a, \text{sign}(y)\text{sign}(|y| - |x|)a, -b)$$

Sea  $\mathbf{H} = (x, y, z)$  un punto cualquiera sobre estas caras, entonces la ecuación del plano de cada una de ellas es dada por:

$$((\mathbf{C} - \mathbf{A}) \times (\mathbf{B} - \mathbf{A})) \cdot (\mathbf{H} - \mathbf{A}) = 0$$



$$\text{I: } |y| < x < a$$

$$\text{II: } |x| < y < a$$

$$\text{III: } |y| < -x < a$$

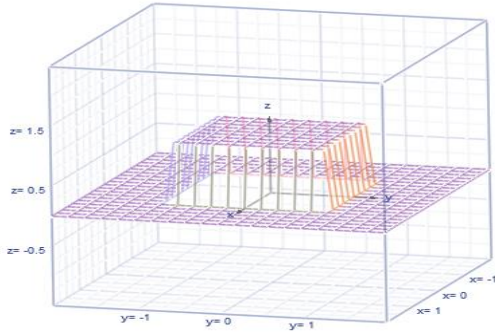
$$\text{IV: } |x| < -y < a$$

Por consiguiente, empleando el factor  $\frac{xy(|y|-|x|)}{xy(|y|-|x|)}$  se remueve la discontinuidad en  $|x| = |y|$  y se obtiene la expresión:

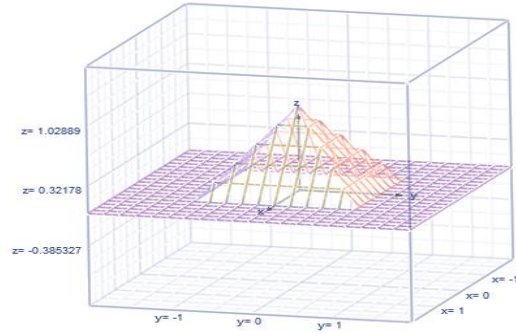
$$z = b \left( 1 - \frac{|x| + |y| + ||x| - |y||}{2a} \right)$$

Finalmente, se define la función  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, b]$  así:

$$f(x, y) = z I_{]-a, a[^2}(x, y)$$



$$I_{]-a, a[^2}(x, y)$$



$$f(x, y)$$

### Conjunto potencia de un conjunto finito

Los subconjuntos con  $k$  elementos de un conjunto  $A$  con  $k \leq |A|$  vienen dados por los conjuntos de imágenes  $Im_{f_k}$  de cada función inyectiva  $f_k: \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow A$ . Si  $A$  es finito, su conjunto potencia viene dado por:

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\} \cup \bigcup_{k=1}^{|A|} Im_{f_k}$$

Conjunto de Cantor

Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$ . Se define el siguiente conjunto:

$$W_{[a,b]} = \left\{ I \subseteq [a,b]: I = \bigcup_{\substack{[a_i,b_i] \subseteq [a,b] \\ [a_i,b_i] \cap [a_j,b_j] = \emptyset \\ i,j \in \mathbb{N}, \text{ con } i \neq j}} [a_i,b_i] \right\}$$

Se define la funci3n  $H: W_{[a,b]} \rightarrow W_{[a,b]}$ , as3:

$$H([a,b]) = \left[ a + \frac{b-a}{3}, b - \frac{b-a}{3} \right]$$

Con la siguiente propiedad:

$$H(A \cup B) = H(A) \cup H(B), \quad A, B \in W_{[a,b]}$$

Se define la siguiente sucesi3n de conjuntos cerrados  $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$  as3:

$$F_n = \begin{cases} [a,b], & n = 0 \\ H(F_{n-1}), & n > 0 \end{cases}$$

Cada  $F_n$  es la uni3n de  $2^n$  intervalos cerrados, disyuntos, y de longitud  $\left(\frac{b-a}{3}\right)^n$

Para  $a = 0$  y  $b = 1$ , el conjunto de Cantor es definido as3:

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n$$

C es un conjunto cerrado en los reales, no vac3o, y de medida nula.

Expresada como sucesi3n de conjuntos  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ :

$n$	$A_n$
0	{0}
1	{0,2}
2	{0,2,6,8}
3	{0,2,6,8,18,20,24,26}
4	{0,2,6,8,18,20,24,26,54,56,60,62,72,74,78,80}

$$A_n = \begin{cases} \{0\}, & n = 0 \\ A_{n-1} \cup \{p \in \mathbb{N}: p = q + \max(A_{n-1}) + 3^{n-1} + 1 \wedge q \in A_{n-1}\}, & n > 0 \end{cases}$$

Sea la sucesi3n de n3meros  $\{a_{n,k}\}_{\substack{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ k \in \mathbb{N} \\ k \leq 2^n}}$ :



$$a_{n,k} = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ a_{n-1,k}, & n > 0 \wedge k \leq 2^{n-1} \\ a_{n-1,k} + a_{n-1,2^{n-1}+3^{n-1}+1}, & n > 0 \wedge k > 2^{n-1} \end{cases}$$

O,

$$a_{n,k} = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ a_{n-1,k} + a_{n-1,2^{n-1}+3^{n-1}+1} \left\lfloor \frac{k-1}{2^{n-1}} \right\rfloor, & n > 0 \end{cases}$$

Se define la sucesión  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \subseteq [0,1]$  cuyos términos son la unión de intervalos cerrados, disyuntos dos a dos, de la siguiente manera:

$$E_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} \left[ \left(\frac{1}{3}\right)^n a_{n,k}, \left(\frac{1}{3}\right)^n (a_{n,k} + 1) \right]$$

Por tanto,  $E_n \subset E_{n-1} \subset \dots \subset E_0$ . Luego, se define la sucesión de funciones indicatriz:

$$I_{E_n}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin E_n \\ 1, & x \in E_n \end{cases}$$

$$I_{E_n}(x) = \sum_{k=1}^{2^n} I_{[(1/3)^n a_{n,k}, (1/3)^n (a_{n,k}+1)]}(x)$$

Dado  $I_{E_0}(x) = 1$  ( $x$  fijo), ¿cuál es el máximo valor de  $n$  tal que  $I_{E_n}(x) = 1$ ?